DURÉE : 3 heures

PRÉLIMINAIRE

Étant donnée la série à termes complexes $u_n(m)$, dont le terme général est une fonction de l'entier positif m, on suppose qu'il existe deux entiers n_0 et m_0 tels que

$$\text{si} \begin{cases} n \geqslant n_0 > 0 \\ m \geqslant m_0 > 0 \end{cases} \quad |u_n(m)| \leqslant \alpha_n$$

où α_n est le terme général d'une série convergente. ($|u_n(m)|$ représente le module du nombre complexe $u_n(m)$.)

Si pour tout n supérieur ou égal à n_0, $u_n(m)$ admet une limite u_n lorsque m tend vers $+\infty$, démontrer que

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{m \to +\infty} \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n(m) \right).$$

PREMIÈRE PARTIE

1° Soient p un entier positif et y un nombre *complexe*. Établir les relations :

$$\sin py = \sum_{0 < q < \frac{p-1}{2}} (-1)^q \, C_p^{2q+1} \cos^{p-2q-1} y \sin^{2q+1} y$$

et

$$\cos py = \sum_{0 < q < \frac{p}{2}} (-1)^q \, C_p^{2q} \cos^{p-2q} y \sin^{2q} y.$$

2° On pose pour t complexe

$$R_p(t) = \sum_{0 < q < \frac{p-1}{2}} (-1)^q \, C_p^{2q+1} t^{2q+1}$$

et

$$\hat{R}_p(t) = \sum_{0 < q < \frac{p}{2}} (-1)^q \, C_p^{2q} t^{2q}$$

et on suppose que $p = 2m + 1$.

a. Étudier les racines du polynôme $R_p(t)$ et montrer que

$$\frac{p \hat{R}_{p-1}(t)}{R_p(t)} = \sum_{n=-m}^{n=m} \frac{1}{t - \operatorname{tg} \frac{n\pi}{p}}.$$

b. Exprimer $\hat{R}_{p-1}(t)(1 + t^2)$ en fonction de $\hat{R}_p$, R_p et t.

En déduire que, pour tout nombre complexe x, non multiple entier de π et pour tout p impair,

$$\left(\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} \frac{x}{p} \right) \cos^2 \frac{x}{p} = \frac{1}{p \operatorname{tg} \frac{x}{p}} + \sum_{n=1}^{m} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{p}}{p \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{p} - \operatorname{tg}^2 \frac{n\pi}{p} \right)}$$

3° Établir les relations suivantes pour x non multiple entier de π ;

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} + 2x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - n^2\pi^2} \right),$$

et

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(n\pi)^{2p+2}} \right) \quad \text{si} \quad |x| < \pi.$$

4° Soit $S_q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$.

Montrer que si $|x| < \pi$, on a :

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - 2x \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{S_{2p+2}}{\pi^{2p+2}} x^{2p} \right).$$

E.N.S. FONTENAY ET ST-CLOUD 1980 (maths ep. part)
-18-

En déduire les valeurs de S_2 et S_4.

Plus généralement, on montrera que $\frac{S_{2p}}{\pi^{2p}}$ est rationnel.

DEUXIÈME PARTIE

1° *a.* Démontrer que pour $|u| < 2\pi$

$$\frac{u}{e^u - 1} = 1 - \frac{u}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^{2n} B_n}{(2n)!}$$

où $B_n = \frac{2(2n)!}{4^n \pi^{2n}} S_{2n}$,

b. En déduire pour tout nombre réel x

$$\frac{u e^{ux}}{e^u - 1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(x) \frac{u^n}{n!}$$

où $T_n(x)$ est un polynôme de degré n.

Soit $Q_n(x)$ la primitive de $T_n(x)$ qui s'annule en zéro, démontrer que $Q_n(1)$ est nul.

2° Démontrer les relations suivantes :

* $\frac{d}{dx} Q_1(x) = x - \frac{1}{2}$

* $\frac{d}{dx} Q_{2p+1} = (2p+1) Q_{2p}$

* $(-1)^p B_p + \frac{d}{dx} Q_{2p} = 2p\, Q_{2p-1}$.

3° Calculer $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ et $Q_3(x)$.

Calculer $Q_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Calculer $Q_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$ en fonction de B_{n+1}. En déduire les zéros de $Q_n(x)$ sur [0, 1] et les valeurs de $Q_n(p)$ où p est un entier naturel. Ces valeurs caractérisent-elles $Q_n(x)$?

TROISIÈME PARTIE

Soit f une fonction dérivable $(2n+2)$ fois sur [0, 1] et ayant sa dérivée $(2n+2)^{ème}$ continue, à valeurs réelles. On pose :

$$I_n = \int_0^1 Q_{2n}(x) f^{(2n+2)}(x)\, dx.$$

1° Établir les relations :

$$I_n = (-1)^n B_n [f^{(2n)}(1) - f^{(2n)}(0)] + 2n(2n-1) I_{n-1}$$

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2}[f'(0) + f'(1)] + \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \frac{B_p}{(2p)!} [f^{(2p)}(1) - f^{(2p)}(0)] - \frac{I_n}{(2n)!}$$

Si de plus $f^{(2n+3)}$ existe et est continue sur [0, 1]

$$I_n = \frac{(-1)^n B_{n+1}}{(2n+2)(2n+1)} f^{(2n+3)}(\zeta) \quad \text{où} \quad \zeta \in [0, 1].$$

2° Soit g une fonction à valeurs réelles définie sur $[a, b]$, $(2n+2)$ fois dérivable et ayant sa dérivée $(2n+2)^{ème}$ continue.

a. Démontrer

$$\int_a^b g(x)\, dx = \frac{b-a}{2}[g(b) + g(a)] + \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p B_p}{(2p)!} (b-a)^{2p} [g^{(2p-1)}(b) - g^{(2p-1)}(a)] + R_n$$

$$R_n = (-1)^{n+1} \frac{B_{n+1}}{(2n+2)!} (b-a)^{2n+3} g^{(2n+2)}(\zeta) \quad \text{où} \quad \zeta \in [a, b].$$

b. Soit $M_n = \sup_{x \in [a,b]} |g^{(2n+2)}(x)|$,

supposons que $\rho = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{b-a}{2\pi} (M_n)^{\frac{1}{2n}}\right]$ et que $\rho < 1$.

Démontrer alors que $\lim_{n \to +\infty} R_n = 0$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail